

14.

1977: TERZO PROBLEMA

DATA LA FUNZIONE

$$y = a \sin x + b \cos x$$

SI DETERMININO I COEFFICIENTI a, b IN MODO CHE PER $x = \frac{2}{3}\pi$ SIA $y = 1$ E CHE I VALORI ESTREMANTI DI y SIANO -2 E 2 .

SE NE DISEGNI IL GRAFICO NELL'INTERVALLO $0 \leq x \leq 2\pi$.

POSTO

$$y = c \sin(x + \varphi)$$

SI CALCOLINO c, φ IN MODO CHE QUESTA FUNZIONE COINCIDA CON QUELLA ASSEGNATA.

FATTE LE SOSTITUZIONI $y = s$, $x = 2\pi t$, DOVE s RAPPRESENTA LO SPOSTAMENTO DALL'ORIGINE DI UN PUNTO P CHE SI MUOVE SU DI UNA RETTA NEL TEMPO t , SI AGGIUNGA, FACOLTATIVAMENTE, LA DESCRIZIONE DEL MOTTO DI P , DETERMINANDO, IN PARTICOLARE, GLI ISTANTI NEI QUALI LA VELOCITA' E' NULLA E QUELLI NEI QUALI E' MASSIMA.

Imponendo alla funzione generica di passare per il punto di coordinate

$$\left(\frac{2}{3}\pi; 1\right)$$

si ottiene

$$1 = a \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2}$$

$$\boxed{a\sqrt{3} - b = 2} \quad (1)$$

Calcoliamo poi la derivata prima e uguagliamo la a zero

$$y' = a \cos x - b \sin x = 0$$

cioè

$$b \sin x = a \cos x$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}} \quad (2)$$

Dalla trigonometria possiamo ricavare le relazioni seguenti

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

e cioè

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \rightarrow \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x \operatorname{tg}^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg}^2 x \rightarrow \sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

e anche

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg}^2 x \rightarrow 1 - \cos^2 x = \cos^2 x \operatorname{tg}^2 x \rightarrow \\ \rightarrow \cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) &= 1 \rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \end{aligned}$$

Il testo (usando il termine improprio di "estremanti") afferma che nei punti individuati dalla (2), la funzione assume ordinate pari a ± 2 .

Quindi in tali punti la funzione diviene

$$a \sin x + b \cos x = \pm 2$$

cioè, sfruttando le relazioni sopra ricavate,

$$a \cdot \left(\pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \right) + b \left(\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \right) = \pm 2$$

$$\pm \frac{a \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \pm \frac{b}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \pm 2$$

o anche, per la (2),

$$\pm \frac{a \cdot \frac{a}{b}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \pm \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \pm 2$$

$$\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm 2$$

che, potendosi scrivere

$$\pm \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm 2$$

ci permette di tralasciare il doppio segno. Si ha per ciò

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2$$

cioè

$$\boxed{a^2 + b^2 = 4} \quad (3)$$

Risolvendo il sistema costituito dalle (1) e (3), si ottengono le due soluzioni

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

che, sostituite nell'equazione generica, forniscono le due funzioni

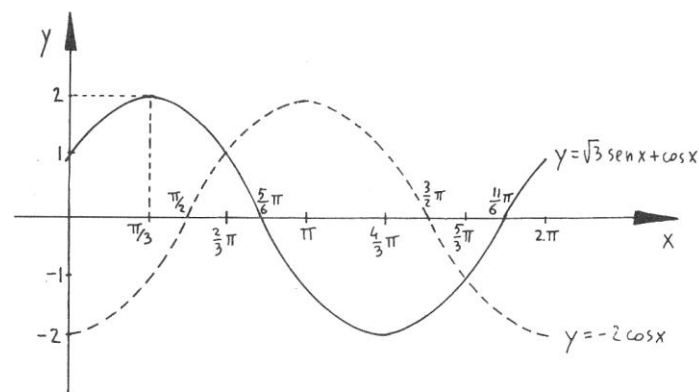
$$\boxed{y = -2 \cos x} \quad (4)$$

$$\boxed{y = \sqrt{3} \sin x + \cos x} \quad (5)$$

entrambe accettabili perché soddisfano tutti i requisiti richiesti.

Studiando separatamente le due funzioni e

riportandole su uno stesso grafico, si ha



Consideriamo ora l'espressione

$$\boxed{y = c \sin(x + \varphi)} \quad (6)$$

e determiniamo per quali valori di c e φ la (6) si trasforma nelle (4) e (5).

Applicando le formule di addizione e sottrazione alla (6), si ha

$$y = c \sin x \cos \varphi + c \cos x \sin \varphi$$

Tenendo presente che la variabile è la x , questa espressione risulta identica alla (4) o alla (5) se i coefficienti corrispondenti sono uguali.

Nel primo caso si ha

$$c \sin x \cos \varphi + c \cos x \sin \varphi = 0 \cdot \sin x - 2 \cos x$$

e quindi deve essere

$$\begin{cases} c \cdot \cos \varphi = 0 \\ c \cdot \sin \varphi = -2 \end{cases}$$

cioè

$$\cos \varphi = 0 \longrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \varphi = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

e sostituendo nella seconda equazione del sistema si trova rispettivamente

$$\begin{cases} c = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Perciò la (4) diviene uguale alla (6) quando

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ c = -2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{3}{2}\pi \\ c = 2 \end{cases}$$

Nel secondo caso invece si ha

$$c \sin x \cos \varphi + c \cos x \sin \varphi = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

e quindi deve essere

$$\begin{cases} c \cos \varphi = \sqrt{3} \\ c \sin \varphi = 1 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro si ha

$$\cotg \varphi = \sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{6} \\ \varphi = \frac{7}{6}\pi \end{cases}$$

sostituendo nella seconda equazione del sistema, si ha rispettivamente

$$\begin{cases} c = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

E perciò la (5) diviene uguale alla (6) quando

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{6} \\ c = 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{7}{6}\pi \\ c = -2 \end{cases}$$

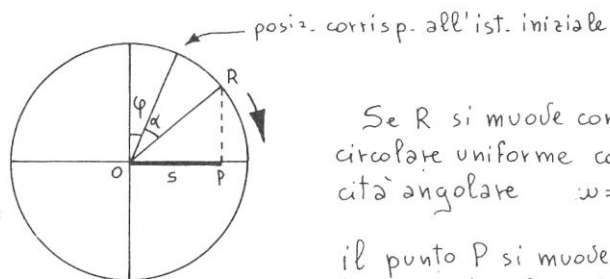
Quindi le funzioni (4) e (5) rappresentano due casi particolari della funzione più generica (6).
Se in quest'ultima poniamo

$$\begin{cases} y = s \\ x = 2\pi t \end{cases}$$

si ottiene

$$s = c \sin(2\pi t + \varphi)$$

ben nota in fisica e che esprime la legge oraria del moto armonico -



Se R si muove con moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega = \frac{\alpha}{t}$

il punto P si muove con moto armonico la cui legge

oraria è

$$s = OR \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

dove φ è lo sfasamento, cioè l'angolo già descritto dal punto R quando si fa partire il cronometro. Essa può anche essere scritta

$$s = OR \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Nel nostro caso è $OR = 2$ (hanno cioè scartate le soluzioni negative perché non hanno significato geometrico), e $\omega = 2\pi$. Quindi il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ sec}$$

Considerando gli sfasamenti corrispondenti alle due soluzioni accettabili, si hanno i due moti

armonici seguenti

$$s = 2 \sin\left(2\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$s = 2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

La velocità di P lungo il diametro orizzontale è massima (in modulo) in O e nulla agli estremi del diametro stesso. Cioè è massima quando

$$2\pi t + \frac{3}{2}\pi = k\pi$$

$$t = \frac{k}{2} - \frac{3}{4}$$

$$2\pi t + \frac{\pi}{6} = k\pi$$

$$t = \frac{k}{2} - \frac{1}{12}$$

ed è minima quando

$$2\pi t + \frac{3}{2}\pi = k\frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{k}{4} - \frac{3}{4}$$

$$2\pi t + \frac{\pi}{6} = k\frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{k}{4} - \frac{1}{12}$$